النظرية الثانية :

أثبت أن التابع الحال $R(x,t,\lambda)$ يحقق المعادلة التكاملية التالية :

$$R(x,t,\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_a^b K(t_1,t) \cdot R(x,t_1,\lambda)\, dt_1 ,$$

~~مشترك~~ البرهان :

من تعريف التابع الحال لدينا :

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \cdot K_{n+1}(x,t)$$

نضرب طرفي العلاقة بـ ~~[شطب]~~ $k(t,y)$:

ثم نكامل بالنسبة لـ t من a إلى b نجد :

$$\int_a^b R(x,t,\lambda) \cdot K(t,y)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \, K_{n+1}(x,t) \cdot K(t,y)\, dt$$

وبالاعتماد على تعريف النواة المكررة نجد :

$$\int_a^b R(x,t,\lambda) \cdot K(t,y)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \, K_{n+2}(x,y)$$

نضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ λ

$$\lambda \int_a^b R(x,t,\lambda) \cdot K(t,y)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \cdot K_{n+2}(x,y)$$

نبدل كل n بـ $n-1$ نجد أن :

$$\lambda \int_a^b R(x,t,\lambda) \cdot K(t,y)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \cdot K_{n+1}(x,y)$$

أو العلاقة الأخيرة تكتب بالشكل :

$$\lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)\, K(t,y)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,y) - K_1(x,y)$$

بالاعتماد على تعريف النواة المكررة والتابع الحال العلاقة الأخيرة

$$\lambda \int_a^b R(x,t,\lambda) \cdot K(t,y)\, dt = R(x,y,\lambda) - K(x,y)$$

$$R(x,y,\lambda) = K(x,y) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda) \cdot K(t,y)\, dt$$

نبدل كل y بـ t وكل t بـ t_1 نجد المطلوب :

$$R(x,t,\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_a^b K(t_1,t) \cdot R(x,t_1,\lambda)\, dt_1$$

ص ٤٥ نظرية :

إذا وجد من أجل قيمة لـ λ تابع مستمر $R(x,t,\lambda)$ في المربع K_0 يحقق المعادلات الأساسية للتابع الحال عندئذٍ يكون للمعادلة التكاملية

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, g(t)\, dt \quad \dots (1)$$

عندئذٍ يكون للمعادلة حل وحيد من أجل λ

/ /

ويمكن التعبير عن هذا الحل

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)\, f(t)\, dt \quad (2)$$

يتكون هذا البرهان من جزءات

اولا كل حل للمعادلة التكاملية (1) يمكن التعبير عنه بالدستور (2) من أجل قيم معينة لـ λ ومن هذا ينتج وحدانية الحل

ثانيا نتحقق أن العلاقة (2) فعلاً حلاً للمعادلة التكاملية المعطاة (1)

برهان الجزء الاول

لتكن لدينا المعادلة التكاملية (1) أثبت أن حل هذه المعادلة يعطى بالعلاقة (2) ومن ثم سنتج وحدانية الحل

البرهان

لتكن $g(x)$ حلاً للمعادلة التكاملية المعطاة (1) نضرب طرفي المعادلة التكاملية (1) بـ $\lambda R(y,x,\lambda)$

ثم نكامل بالنسبة لـ x من $x=a$ الى $x=b$ نجد:

$$\lambda \int_a^b R(y,x,\lambda)\, g(x)\, dx = \lambda \int_a^b R(y,x,\lambda)\, f(x)\, dx + \lambda \int_a^b \left[\int_a^b \lambda R(y,x,\lambda)\, k(x,t)\, dx \right] g(t)\, dt$$

واستنادا الى العلاقة الاساسية التي يحققها التابع الحال R

يمكن أن تكتب العلاقة الأخيرة بالشكل التالي:

$$\lambda \int_a^b R(y,x,\lambda)\, g(x)\, dx = \lambda \int_a^b R(y,x,\lambda)\, f(x)\, dx + \lambda \int_a^b [R(y,t,\lambda) - R(y,t)]\, g(t)\, dt$$

نفرق التكاملات

$$\lambda \int_a^b R(y,x,\lambda)\, g(x)\, dx = \lambda \int_a^b R(y,x,\lambda)\, f(x)\, dx + \lambda \int_a^b R(y,t,\lambda)\, g(t)\, dt - \lambda \int_a^b k(y,t)\, g(t)\, dt$$

وبالاعتماد على المعادلة التكاملية المعطاة المعادلة الأخيرة تعطى بالشكل التالي

$$\lambda \int_a^b R(y,x,\lambda)\, g(x)\, dx = \lambda \int_a^b k(y,x,\lambda)\, f(x)\, dx + \lambda \int_a^b R(y,t,\lambda)\, g(t)\, dt - [g(y) - f(y)]$$

/ /

بحذف الحدود المتشابهة :

$$g(y) = f(y) + \lambda \int_a^b R(y, x, \lambda)\, f(x)\, dx$$

نبدل كل y بـ x وكل x بـ t فنحصل على :

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t, \lambda) \cdot f(t) \cdot dt$$

نفرض وجود حلين للمعادلة $g_1(x)$ و $g_2(x)$ مختلفين ، بما أن $g_1(x)$ حلاً للمعادلة فإن

$$g_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t, \lambda) \cdot f(t)\, dt$$

وبما أن $g_2(x)$ حلاً للمعادلة أيضاً فإن

$$g_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t, \lambda)\, f(t)\, dt$$

$g_1(x) = g_2(x) \Rightarrow$ للمعادلة حلاً وحيد

برهان الجزء الثاني ،

لتكن لدينا المعادلة التكاملية (1) ونفرض أن $R(x, t, \lambda)$ التابع الحال أي أن التابع الـ $g(x)$ المعرّف بالعلاقة (2) هو فعلاً حلاً للمعادلة التكاملية المعطاة (1) ويحقق العلاقات الأساسية :

البرهان .

نبدل العلاقة المعطاة (2) في المعادلة المعطاة (1) نجد :

$$f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t, \lambda) \cdot f(t)\, dt = f(x) + \lambda \, ~~\int_a^b k(x,t) [f(t) + \int_a~~$$

$$+ \lambda \int_a^b k(x,t) \cdot \left[f(t) + \lambda \int_a^b R(t, t_1, \lambda) \cdot f(t_1)\, dt_1 \right] dt$$

$$\lambda \int_a^b R(x, t, \lambda)\, f(t)\, dt = \lambda \int_a^b k(x, t)\, f(t)\, dt + \lambda \int$$

$$+ \lambda \int_a^b \left[\lambda \int_a^b R(t, t_1, \lambda)\, f(t_1)\, dt_1 \right] k(x, t)\, dt$$

$$= \lambda \int_a^b k(x, t)\, f(t)\, dt + \lambda \int_a^b \left[\lambda \int_a^b R(t, t_1, \lambda)\, k(x, t)\, dt \right] f(t_1) \cdot dt_1$$

نبدل في التكامل الثاني كل t_1 بـ t وكل t بـ t_1 : عندئذٍ العلاقة الأخيرة تكتب على الشكل

$$\int_a^b \left[R(x, t, \lambda) - k(x, t) - \lambda \int_a^b R(t_1, t, \lambda)\, k(x, t_1)\, dt_1 \right] f(t)\, dt = 0$$

/ /

الوسطية

وبما أن التابع الحل يحقق العلاقات الأساسية فإن العلاقة الموجودة في القوسين معدومة وبالتالي نحصل على المتطابقة ... ٥ = ٥ أي أن العلاقة (2) هي حل المعادلة التكاملية التكاملية وهو المطلوب

مبرهنة 3:

لتكن لدينا معادلة فريدهولم التكاملية

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, g(t)\, dt \quad \dots (1)$$

ولنفرض أن

$$f(x) = \int_a^b k(x,t) \cdot W(t) \, dt \quad \dots (2)$$

بما أن $W(t)$ تابع لـ t فقط، ولنفرض أن λ ليس موضع صفري لـ Δ ليست قيمة خاصة

عندئذ نبرهن أن حل المعادلة التكاملية المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$g(x) = \int_a^b R(x,t,\lambda) \cdot W(t) \, dt \quad \dots (3)$$

البرهان:

حل المعادلة التكاملية المعطاة (1) يعطى بالدستور التالي:

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)\, f(t)\, dt$$

نبدل $f(x)$ بما يساويها نجد:

$$g(x) = \int_a^b k(x,t) \cdot W(t) \, dt - \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda) \left[\int_a^b R(t,t_1) \cdot W(t_1)\, dt_1 \right] dt$$

نبدل في التكامل الثاني كل من t بـ t_1 وكل t_1 بـ t فنحصل على:

$$g(x) = \int_a^b k(x,t) \cdot W(t)\, dt + \int_a^b \left[\lambda \int_a^b k(t_1,t) \cdot R(x,t_1,\lambda)\, dt_1 \right] W(t)\, dt$$

وبما أن التابع الحل يحقق العلاقات الأساسية فإن التكامل الداخلي في التكامل الثاني:

$$g(x) = \int_a^b k(x,t)\, W(t)\, dt + \int_a^b \left[R(x,t,\lambda) - k(x,t) \right] W(t)\, dt$$

نبدل التكامل بالطرف الثاني ونجمع الحدود المتشابهة نجد: وهو المطلوب

$$g(x) = \int_a^b R(x,t,\lambda)\, W(t)\, dt$$

تطبيق

أوجد حل المعادلة:

$$g(x)=\int_{-1}^{+1} x\,t^4\,dt+\lambda\int_{-1}^{+1} x\,t\,g(t)\,dt$$

الحل

لدينا

$$f(x)=\int_{-1}^{1} x\,t^4\,dt=\int_{-1}^{1} x\,t\,.\,t^3\,dt \Rightarrow \psi(t)=t^3$$

$$g(x)=\int_{-1}^{1} R(x,t,\lambda)\,t^3\,dt$$

علماً أن

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\,K_{n+1}(x,t)$$

$$=K_1(x,t)+\lambda K_2(x,t)+\lambda K_3(x,t)+\cdots$$

$$K_1(x,t)=K(x,t)=x\,t$$

$$K_n(x,t)=\int_a^b K_{n-1}(x,t_1)\,.\,K(t_1,t)\,dt_1 \qquad n=2,3,\cdots$$

$$K_2(x,t)=\int_{-1}^{1} K_1(x,t_1)\,.\,K(t_1,t)\,dt_1=\int_{-1}^{1} x\,t_1\,.\,t_1\,t\,dt_1=x\,t\int_{-1}^{1} t_1^2\,dt_1$$

$$=x\,t\,.\,\frac{1}{3}\,t_1^3\Big|_0^1=\frac{xt}{2}(1+1)=\frac{2}{3}\,x\,t$$

$$K_3(x,t)=\int_{-1}^{1} K_2(x,t_1)\,.\,K(t_1,t)\,dt_1=\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}x\,t_1\,.\,t_1\,.\,t\,.\,dt_1=\frac{2}{3}x\,t\int_{-1}^{1} t_1^2\,dt_1$$

$$=\frac{2}{3}\,.\,x\,t\,.\,\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2.\,x\,t$$

وهكذا ...

$$R(x,t,\lambda)=x\,t+\frac{2}{3}\lambda\,x\,t+\left(\frac{2}{3}\right)^2.\lambda^2\,x\,t+\cdots$$

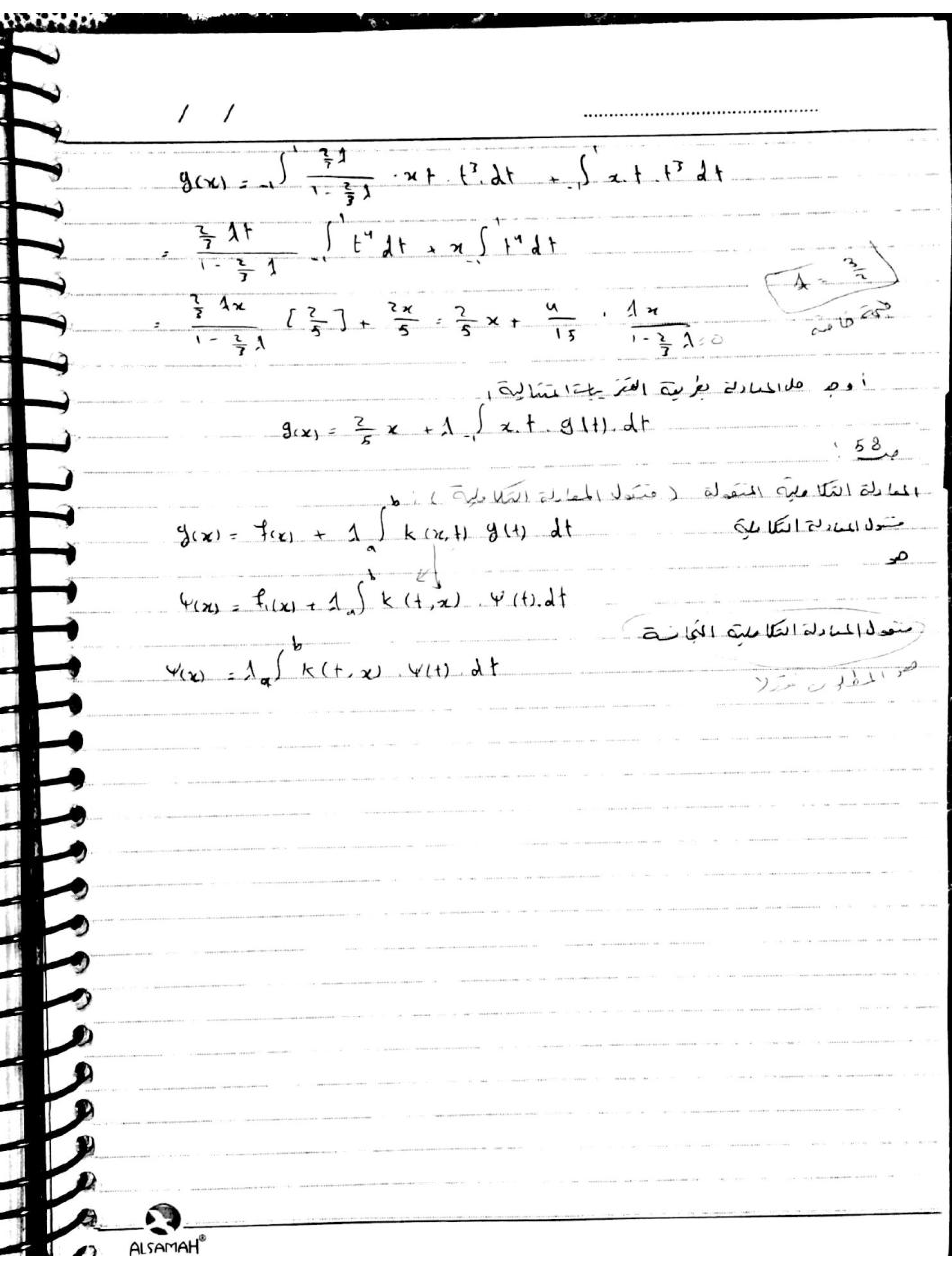
$$=x\,t+\frac{2}{3}\lambda\,x\,t\left[1+\frac{2}{3}\lambda+\left(\frac{2}{3}\lambda\right)^2+\cdots\right.$$

نفرض $\left|\frac{2}{3}\lambda\right|<1$ أي $|\lambda|<\frac{3}{2}$

$$R(x,t,\lambda)=x\,t+\frac{2}{3}\lambda\,x\,t\,.\,\frac{1}{1-\frac{2}{3}\lambda}$$

$$g(x)=\int_{-1}^{1}\frac{\frac{2}{3}\lambda}{1-\frac{2}{3}\lambda}\,.\,x\,t\,.\,t^3\,.\,dt=\frac{\frac{2}{3}\lambda x}{1-\frac{2}{3}\lambda}\int_{-1}^{1} t^4\,dt$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\lambda x}{1-\frac{2}{3}\lambda}$$



/ /

$$g(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\frac{2}{3}\lambda}{1-\frac{2}{3}\lambda} \cdot x t \cdot t^3 . dt + \int_{-1}^{1} x . t . t^3 \, dt$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\lambda t}{1-\frac{2}{3}\lambda} \int_{-1}^{1} t^4 \, dt + x \int_{-1}^{1} t^4 \, dt$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\lambda x}{1-\frac{2}{3}\lambda} \left[\frac{2}{5} \right] + \frac{2x}{5} = \frac{2}{5} x + \frac{4}{15} , \quad \frac{\lambda x}{1-\frac{2}{3}\lambda} , \quad 1-\frac{2}{3}\lambda = 0$$

$\lambda = \frac{3}{2}$

قيمة خاصة

أوجد حل المعادلة بطريقة التقريبات المتتالية،

$$g(x) = \frac{2}{5} x + \lambda \int_{-1}^{1} x . t . g(t) . dt$$

ص 58 :

المعادلة التكاملية المنقولة (منقول المعادلة التكاملية) :

منقول المعادلة التكاملية

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} k(x,t) \, g(t) \, dt$$

ص

$$\psi(x) = f_1(x) + \lambda \int_{a}^{b} k(t,x) \, . \psi(t) . dt$$

منقول المعادلة التكاملية المجانسة

$$\psi(x) = \lambda \int_{a}^{b} k(t,x) \, . \psi(t) . dt$$

ALSAMAH®

Scanned by CamScanner

ص59

- دراسة قابلية الحل في حالة القيم الخاصة للمعادلة التكاملية:

لتكن لدينا المعادلة التكاملية ①... $g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, g(t)\, dt$

ونفرض λ قيمة خاصة ونفرض أن $\psi(x)$ أحد حلول منقول المعادلة التكاملية المتجانسة:

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(t,x)\, \psi(t)\, dt \quad \dots (2)$$

المطلوب: أن أوجد الشرط الذي يجب أن يتحقق من أجل أن يكون للمعادلة حل،

أثبت أنه حتى يكون للمعادلة حل يجب أن يتحقق الشرط $\int_a^b f(x)\,\psi(x)\, dx = 0$

الحل

نضرب طرفي المعادلة (1) بـ $\psi(x)$ ونكامل بالنسبة لـ x من a إلى b:

$$\int_a^b g(x)\,\psi(x)\, dx = \int_a^b f(x)\,\psi(x)\, dx + \int_a^b \left[\lambda \int_a^b K(x,t)\,\psi(x)\, dx \right] g(t)\, dt$$

نبدل في العلاقة (2) المعطاة كل x بـ t وكل t بـ x في بدل التكامل الثاني فنحصل:

$$\int_a^b g(x)\,\psi(x)\, dx = \int_a^b f(x)\,\psi(x)\, dx + \int_a^b \psi(t)\, g(t)\, dt$$

وبحذف الحدود المتشابهة نجد:

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\, dx = 0$$

وبالتالي حتى يكون للمعادلة حل يجب أن يتحقق هذا الشرط

ص69 إيجاد حلول المعادلات التكاملية ذات النواة المتردية:

إيجاد حل معادلة فريدهولم غير المتجانسة للمعادلات التكاملية

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, g(t)\, dt \quad \dots (1)$$

علماً أن النواة

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(t) \quad \dots (2)$$

الحل:

نعوض المعادلة (2) في (1) فنحصل على:

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \int_a^b b_i(t)\, g(t)\, dt \quad \dots (3)$$

ونفرض:

$$\int_a^b b_i(t)\, g(t)\, dt = C_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots (4)$$

/ /

وبالتالي العلاقة (3) تأخذ الشكل : فقط

$$\left[g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \, a_i(x) \right] \quad --- (5)$$

نبدل العلاقة (5) في (4) نحصل على:

$$\int_a^b b_i(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \, a_j(t) \right] dt = c_i \quad ; \quad [i = 1, 2, \dots, n]$$

هذه العلاقة نكتبها بالشكل

$$\int_a^b b_i(t) \cdot f(t)\,dt + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b b_i(t) \cdot a_j(t)\,dt = c_i \quad ; (i = 1, 2, \dots, n)$$

فقط

$$\left[\int_a^b b_i(t)\, f(t)\, dt = f_i \right] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

فقط

$$\left[\int_a^b b_i(t) \cdot a_j(t)\, dt = \alpha_{ij} \right] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

نبدل هذه القيم في المعادلة فنحصل على:

فقط

$$\left[f_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \, \alpha_{ij} = c_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \right] \quad --- (6)$$

بما أن المعادلة تكاملية مفروضة تكون الدوال $K(x,t)$ ، $f(x)$ وبالتالي نستطيع حساب الأعداد

وبذلك تكون مجموعة المعادلات الجبرية (6) هي مجموعة معادلات خطية بالمجاهيل وبالتالي حل معادلة فريدهولم ذات النواة المنحلة يتحول إلى حل مجموعة من المعادلات الجبرية الخطية (6) بنشر العلاقة (6)

$i = 1$

$$i = 1 : \quad f_1 + \lambda c_1 \alpha_{11} + \lambda c_2 \alpha_{12} + \dots + \lambda c_n \alpha_{1n} = c_1$$

فقط

$$(1 - \lambda \alpha_{11}) c_1 - \lambda c_2 \alpha_{22} - \dots - \lambda \alpha_{1n} c_n = f_1$$

$$i = 2 : \quad -\lambda \alpha_{21} c_1 + (1 - \lambda \alpha_{22}) c_2 - \dots - \lambda \alpha_{2n} c_n = f_2$$

$$i = 3 : \quad -\lambda \alpha_{31} c_1 - \lambda \alpha_{32} c_2 + (1 - \lambda \alpha_{33}) c_3 - \dots - \lambda \alpha_{3n} c_n = f_3$$

$$i = n : \quad -\lambda \alpha_{n1} c_1 - \lambda \alpha_{n2} c_2 - \dots + (1 - \lambda \alpha_{nn}) c_n = f_n$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} (1 - \lambda \alpha_{11}) & -\lambda \alpha_{12} & \dots & -\lambda \alpha_{1n} \\ -\lambda \alpha_{21} & (1 - \lambda \alpha_{22}) & \dots & -\lambda \alpha_{22} \\ \vdots & & & \vdots \\ -\lambda \alpha_{n1} & \dots & \dots & 1 - \lambda \alpha_{nn} \end{vmatrix} \quad (7)$$

/ /

وهنا نميز حالتين الحالة الاولى :

إذا كانت λ مختلفة عن القيم الذاتية (لا يساوي الصفر) عندئذ مجموعة المعادلات الجبرية (6) تملك حلاً وحيداً $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ، $D(\lambda) \neq 0$

وبالتالي يوجد للمعادلة التكاملية المعطاة حل وحيد

وإذا كان $f(x) = 0$ « معادلة فريدهولم المتجانسة » فإن مجموعة المعادلات (6) تصبح معادلة جبرية متجانسة ويكون حلها الوحيد هو الحل الصفري $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$

أي أن المعادلة المتجانسة تملك حل وحيد هو $g(x) = 0$

الحالة الثانية :

أما إذا كانت $D(\lambda) = 0$ عندئذ لا يكون للمعادلة الجبرية (6) ~~حل~~ لها حل أو لها عدد غير منتهي من الحلول ومن هنا نستنتج القيم الذاتية أي أن $D(\lambda) = 0$

مثال ص 72

اوجد حل المعادلة التكاملية :

$$g(x) = \cos x + \lambda \int_0^{2\pi} [\sin x \cos t - \sin 2x \cdot \cos 2t + \sin 3x \cos 3t]\, g(t)\, dt \quad \ldots (1)$$

الحل :

$f(x) = \cos x$; $K(x,t) = \sin x \cos t - \sin 2x \cos 2t + \sin 3x \cdot \cos 3t$

ومنه $K(x,t)$ حيث : $a_1 = \sin x$ $\quad a_2(x) = -\sin 2x$ $\quad a_3(x) = \sin 3x$

$b_1(t) = \cos t$ $\quad b_2(t) = \cos 2t$ $\quad b_3(t) = \cos 3t$ $\quad (i = 1, 2, 3)$

وبالتالي حل المعادلة يعطى بالشكل التالي :

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{3} c_i\, a_i(x)$$

$$\left[g(x) = \cos x + \lambda c_1 \sin x - \lambda \sin 2x\, c_2 + \lambda \sin 3x\, c_3 \right] \ldots (2)$$

علماً أن c_1, c_2, c_3 يا حل تحدد من المعادلات الجبرية الآتية :

$$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\, c_j = c_i$$

أي :

$i = 1$; $\quad f_1 + \lambda \alpha_{11} c_1 + \lambda \alpha_{12} c_2 + \lambda \alpha_{13} c_3 = c_1$

$i = 2$; $\quad f_2 + \lambda \alpha_{21} c_1 + \lambda \alpha_{22} c_2 + \lambda_{23} c_3 = c_2$

$i = 3$; $\quad f_3 + \lambda \alpha_{31} c_1 + \lambda \alpha_{32} c_2 + \lambda_{33} c_3 = c_3$

حيث

$$f_i = \int_a^b b_i(t) \cdot f(t)\, dt \quad ; \quad \alpha_{ij} = \int_a^b b_i(t)\, a_j(t) \cdot dt$$

$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$ $\qquad$ $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$

$\cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$ $\qquad$ $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$

$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \sin(x-y)]$

$\sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t$

$$f_1 = \int_0^{2\pi} b_1(t) \cdot f(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2t)\, dt \qquad \sin 2t \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$= \frac{1}{2}\, t \Big|_0^{2\pi} = \pi \Rightarrow f_1 = \pi$$

$$f_2 = \int_0^{2\pi} \cos 2t \cdot \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[\cos 3t + \cos t]\, dt = 0 \qquad \sin 3t \Big|_0^{2\pi} \quad \sin t \Big|_0^{2\pi}$$

$$\Rightarrow f_2 = 0$$

$$f_3 = \int_0^{2\pi} b_3(t) \cdot f(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos 3t \cdot \cos t\, dt = 0 \Rightarrow f_3 = 0$$

$$\alpha_{11} = \int_0^{2\pi} f_1(t) \cdot a_1(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \sin t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2t\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{4}[1-1] = 0 \Rightarrow \alpha_{11} = 0$$

$$\alpha_{12} = \int_0^{2\pi} b_1(t) \cdot a_2(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot (-\sin 2t)\, dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\sin 3t + \sin t]\, dt = -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos 3t - \cos t\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}[1+1-1-1] = 0 \Rightarrow \alpha_{12} = 0 \quad ; \quad \alpha_{13} = 0$$

الباقي مثل ذلك باقي كلهن أصفار نبدل هذه القيم في المعادلات الجبرية (3) نحصل على المعادلات الجديدة

$$\left.\begin{aligned} \pi &= c_1 \\ 0 &= c_2 \\ 0 &= c_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} c_1 &= \pi \\ c_2 &= 0 \\ c_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ جملة المعادلات غير متجانسة

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

ومنه للمعادلة حل وحيد إيجاد هذا الحل:

بحل المعادلات الجبرية (4) و ~~الحصول~~ الحصول على C_1, C_2, C_3 نبدل قيم الثوابت في (2)

$$g(x) = \cos x + \lambda \pi \sin x$$

وذلك من أجل أية قيم λ وهو الحل الوحيد
ولا توجد قيم خاصة لأن $D(\lambda) \neq 0$

ط ٢) λ ليست قيمة خاصة $\quad b_{ij}=0 \quad$ والصيغة المعادلة يعطى بالشكل

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \cdot f(t)\, dt$$

$$g(x) = \cos x + \lambda \int_0^{2\pi} [\sin x \cos t - \sin 2x \cdot \cos 2t + \sin 3x \cdot \cos 3t] \cdot \cos t \, dt$$

$$= \cos x + \lambda \sin x \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt - \lambda \sin 2x \int_0^{2\pi} \cos 2t \cdot \cos t \cdot dt$$

$$+ \lambda \sin 3x \int_0^{2\pi} \cos 3t \cdot \cos t \, dt$$

$$= \cos x + \frac{\lambda \sin x}{2} \cdot \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)\, dt = \cos x + \lambda \pi \sin x$$

معادلة فردهولم التكاملية $g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \cdot g(t) \cdot dt$

ونفرض أن النواة متردية و λ ليست قيمة خاصة 6 $\alpha_{ij} = 0$

- أثبت أن حل المعادلة يعطى بالدستور

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \cdot f(t) \cdot dt$$

الحل:

حل المعادلة يعطى بالدستور التالي: $g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i a_i(x)$

c_i تحدد من المعادلات الجبرية

$$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} c_i = c_i$$

وبما أن $\alpha_{ij} = 0 \Leftarrow f_i = c_i$

$$\Rightarrow c_i = f_i = \int_a^b b_i(t) \cdot f(t) \cdot dt$$

نبدل في الحل:

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \int_a^b b_i(t) \cdot f(t) \cdot a_i(x) \cdot dt$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} b_i(t) \cdot a_i(x) \right) f(t) \cdot dt$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \cdot f(t)\, dt$$

حل معادلة فردهولم: $g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, g(t) \cdot d(t)$ ...(1)

$D(\lambda) \neq 0$ المعادلة تملك حل وحيد والمعادلة المتجانسة

$g(x) = \lambda \int_a^b k(x,t) \cdot g(t) \cdot d(t)$ ...(2)

تملك الحل الصفري $g(x) = 0$

② $D(\lambda) = 0$ المعادلة المتجانسة تملك حلول غير الحلول الصفرية

أما المعادلة المعطاة (1) فإن لها عدد غير منتهي من الحلول إذا تحقق

$$\int_a^b \psi(x) \cdot f(x) \cdot dx = 0$$

حيث $\psi(x)$ أي حلول متحول المعادلة التكاملية المتجانسة

ولا تملك أي حل إذا كان $\int_a^b \psi(x) \cdot f(x)\, dx \neq 0$

دالة زوجية $f(-x) = -f(x)$

/ / ص 76

من أجل القيمة الخاصة $\lambda = \lambda_1$ حل المعادلة المتجانسة

$$g(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i a_i(x) = \lambda c_1 a_1(x) + \lambda c_2 a_2(x) + \cdots + \lambda c_n a_n(x)$$

$$\lambda = \lambda_1 : \quad g(x) = \lambda_1 c_1 a_1(x) + \lambda_1 c_2 a_2(x) + \cdots + \lambda_1 c_n a_n(x)$$

التوابع الخاصة الموافقة للقيمة $\lambda = \lambda_1$

$$g(x) = \lambda_1 a_1(x), \quad g(x) = \lambda_1 a_2(x) \cdots, \quad g(x) = \lambda_1 a_n(x)$$

ملاحظة: المعادلات الجبرية التي تحدد $c_1 \cdots c_n$ لحلول المعادلة التكاملية المتجانسة تعطى بالعلاقة

$$\left[C_i = \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} C_k \right]$$

تطبيق على المعادلة المتجانسة: ص 79

أوجد حل المعادلة:

$$g(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (5xt^3 + 4x^2t + 3xt)\, g(t)\, dt \quad \cdots (1)$$

الحل:

لدينا النواة

$$K(x,t) = 5xt^3 + 4x^2t + 3xt = 5xt^3 + (4x^2 + 3x) \cdot t$$

$$a_1(x) = 5x \qquad a_2(x) = 4x^2 + 3x$$

$$b_1(t) = t^3 \qquad b_2(t) = t \qquad i = 1, 2$$

$$g(x) = \lambda \sum_{i=1}^{2} c_i a_i(x) = 5\lambda c_1 x + \lambda (4x^2 + 3x) c_2 \quad \cdots (2)$$

نعوض f_i لا يوجد تجانس $f_i = 0$

$$\lambda \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} C_j = C_i$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda \alpha_{11} C_1 + \lambda \alpha_{12} C_2 &= C_1 \\ \lambda \alpha_{21} C_1 + \lambda \alpha_{22} C_2 &= C_2 \end{aligned}\right\} \cdots (3)$$

$$\alpha_{ij} = \int_a^b b_i(t) \cdot a_j(t)\, dt$$

$$\alpha_{11} = \int_{-1}^{1} b_1(t) \cdot a_1(t)\, dt = \int_{-1}^{1} t^3 \cdot 5t\, dt = 5\int_{-1}^{1} t^4 dt = t^5 \Big|_{-1}^{1} = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha_{11} = 2}$$

$$\alpha_{12} = \int_{-1}^{1} b_1(t)\, a_2(t)\, dt = \int_{-1}^{1} t^3(4t^2 + 3t)\, dt = 3\int_{-1}^{1} t^4 dt = \frac{3}{5} t^5 \Big|_{-1}^{1} = \frac{6}{5} = \alpha_{12}$$

/ /

$$\alpha_{21} = \int_{-1}^{1} b_2(t)\, a_1(t)\, dt = \int_{-1}^{1} t \cdot 5t \cdot dt = \frac{5}{3} \cdot 2 = \frac{10}{3}$$

$$\alpha_{22} = \int_{-1}^{1} t \cdot (4t^2 + 3t) \cdot dt = \int_{-1}^{1} 3t^2 dt = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha_{22} = 2}$$

نبدل قيم هذه الثوابت في المعادلات الجبرية (3) نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda c_1 + \frac{6\lambda}{5} c_2 &= c_1 \\ \frac{10\lambda}{3} c_1 + 2\lambda c_2 &= c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} (1-2\lambda) c_1 - \frac{6\lambda}{5} c_2 &= 0 \\ -\frac{10\lambda}{3} c_1 + (1-2\lambda) c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (4)$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-2\lambda & -\frac{6\lambda}{5} \\ -\frac{10\lambda}{3} & 1-2\lambda \end{vmatrix} = (1-2\lambda)^2 - \frac{6}{5} \cdot \frac{10}{3} \lambda^2$$
$$= (1-2\lambda)^2 - (2\lambda)^2$$

حساب القيم الذاتية :

$$D(\lambda) = 0 \Rightarrow (1-2\lambda)^2 - 2(\lambda)^2 = 0$$
$$\Rightarrow (1-2\lambda-2\lambda)(1-2\lambda+2\lambda) = 0$$
$$1-4\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{4}}$$

وهنا نميز حالتين :

① $D(\lambda) \neq 0$ أي $\lambda \neq \frac{1}{4}$ وبالتالي المعادلة المعطاة تملك الحل الصفري فقط $y(x) = 0$

② $D(\lambda) = 0$ أي $\lambda = \frac{1}{4}$ قيمة خاصة ؛ نبدل λ بقيمتها في المعادلات (4)

$$\left.\begin{aligned} (1-\tfrac{1}{2}) c_1 - \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{4} c_2 &= 0 \\ -\frac{10}{3} \cdot \frac{1}{4} c_1 + (1-\tfrac{1}{2}) c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{1}{2} c_1 - \frac{3}{10} c_2 &= 0 \\ -\frac{5}{6} c_1 + \frac{1}{2} c_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\int \frac{\sin(2x-4t)}{2\cos(x-2t)}\, g(t)\, dt \qquad \Rightarrow \quad \sin(x-2t)$$

/ / البسط $= 2\sin(x-2t)\cdot\cos(x-2t)$

$$\begin{rmatrix} \end{rmatrix}$$

(1) ... $5c_1 - 3c_2 = 0$

(2) ... $-5c_1 + 3c_2 = 0$

$\Rightarrow 5c_1 = 3c_2 \Rightarrow c_1 = \frac{3}{5} c_2$

نبدل في (2)

$$-5\left(\frac{3}{5} c_2\right) + 3c_2 = 0 \Rightarrow -3c_2 + 3c_2 = 0$$

$$(-3+3)c_2 = 0 \Rightarrow 0\cdot c_2 = 0 \Rightarrow \text{محققة}\ \forall c_2$$

$$c_1 = \frac{3}{5} c_2, \ \forall c_2$$

$$g(x) = 5\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5} c_2 x + \frac{1}{4}(4x^2+3x)c_2$$

$$g(x) = c_2\left[\frac{3}{4} + x^2 + \frac{3}{4}x\right] \Rightarrow g(x) = c_2\left[\frac{3}{2}x + x^2\right]$$

الدالة الذاتية $g^{(1)}(x) = \frac{3}{2}x + x^2$

مثال (2) أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$g(x) = 1 + \lambda \int_0^{2\pi} \cos(x+t)\cdot g(t)\cdot d(t) \quad \ldots(1)$$

الحل

لدينا

$$K(x,t) = \cos(x+t) = \cos x\cdot\cos t - \sin x\cdot\sin t$$

$a_1(x) = \cos x \qquad a_2(x) = -\sin x$

$b_1(t) = \cos t \qquad b_2(t) = \sin t$

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{2} c_i a_i(x)$$
$$g(x) = 1 + \lambda c_1 \cos x - \lambda c_2 \sin x \qquad (2)$$

$$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} c_j = c_i$$

$$f_1 + \lambda \alpha_{11} c_1 + \lambda \alpha_{12} c_2 = c_1$$
$$f_2 + \lambda \alpha_{21} c_1 + \lambda \alpha_{22} c_2 = c_2$$

$$f_i = \int_a^b b_i(t)\cdot f(t)\, dt \qquad \alpha_{ij} = \int_a^b b_i(t)\, a_j(t)\, dt = \alpha_{ij}$$

/ /

$$f_1 = \int_0^{2\pi} b_1(t) \cdot f(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos t \, dt = 0$$

$$f_2 = \int_0^{2\pi} \sin t \, dt = -\cos t \Big|_0^{2\pi} = -(1-1) = 0$$

$\alpha_{11} = \pi \quad ; \quad \alpha_{12} = 0$

$\alpha_{21} = 0 \quad ; \quad \alpha_{22} = -\pi$

نبدل هذه القيم في المعادلات الجبرية :

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \pi c_1 = c_1 \\ -\lambda \pi c_2 = c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (1-\lambda\pi) c_1 = 0 \\ (1+\lambda\pi) c_2 = 0 \end{array}\right\} \cdots (4)$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\pi & 0 \\ 0 & 1+\lambda\pi \end{vmatrix} = (1-\lambda\pi)(1+\lambda\pi)$$

القيم الخاصة $\Leftarrow D(\lambda) = 0$

إما: $(1-\lambda\pi) = 0 \Rightarrow \lambda = +\frac{1}{\pi}$

أو $(1+\lambda\pi) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\pi}$

وهنا نميز حالتين :

① $D(\lambda) \neq 0$ أي $\lambda \neq \mp\frac{1}{\pi}$ وبالتالي حسب نظرية فريدهولم أن المعادلة تملك حلاً وحيداً ولإيجاد هذا الحل :

~~المعادلة~~ نحل المعادلات الجبرية (4) فنحصل على ! $c_1 = 0 \quad c_2 = 0$

نبدل هذه القيم في العلاقة (2) فنحصل $g(x) = 1$ وهو المطلوب

② $D(\lambda) = 0$ وهنا نميز حالتين، ① $\lambda = \frac{1}{\pi}$ ، نبدل في (4) فنحصل

$0 \cdot c_1 = 0 \quad ; \quad 2 \cdot c_2 = 0 \Rightarrow$

$c_2 = 0 \Rightarrow \forall c_1$

وبالتالي المعادلة المعطاة لها عدد لانهائي من الحلول

$g(x) = 1 + \frac{1}{\pi} c_1 \cos x \quad , \forall c_1$

② $\lambda = -\frac{1}{\pi}$ نبدل هذه القيمة في (4) فنجد :

$2 \cdot c_1 = 0 , \quad 0 \cdot c_2 = 0$

$c_1 = 0 \; ; \; \forall c_2$

المعادلة تملك عدد لانهائي من الحلول نبدل c_1 و c_2 في العلاقة (2) نجد

ALSAMAH®

Scanned by CamScanner

/ /

$$y(x) = 1 + \frac{1}{\pi} c_2 \sin x \quad \forall c_2$$

حساب حلول المعادلة المتجانسة $\psi(x)$:

بما أن النواة متناظرة لأن $\cos(t+x) = \cos(x+t)$ فإن حل متحول المعادلة التكاملية المتجانسة هو نفسه حل المعادلة المتجانسة

إيجاد حل المعادلة المتجانسة

$$f_i = 0 \quad ; \quad (1 - \lambda\pi) c_1 = 0$$

$$(1 + \lambda\pi) c_2 = 0$$

$$0 \cdot c_1 = 0 \quad ; \quad 2 \cdot c_2 = 0 \Rightarrow$$

$$c_2 = 0 \quad ; \quad \forall c_1$$

نبدل في (2) مع العلم أن

$$y(x) = \psi(x) = \frac{1}{\pi} c_1 \cos x$$

$$\int_a^b \psi(x) \cdot f(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \cos(x) \cdot (1)\, dx = 0$$

وأن المعادلة تملك عدد لانهائي من الحلول

إيجاد هذه الحلول

بحل المعادلات الجبرية (4) مع العلم $\left(\lambda = \frac{1}{\pi}\right)$: $\quad c_2 = 0, \ \forall c_1$

$$y(x) = 1 + \frac{1}{\pi} c_1 \cos x$$

وهكذا $\lambda = -\frac{1}{\pi}$

ملاحظة: حل المعادلة $\quad y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt$

$$y(x) = f(x)$$

علماً أن $K(x,t)$ نواة متردية λ ليست قيمة خاصة و $f_i = 0$

الإثبات:

بما أن النواة متردية بأن الحل يعطى بالدستور $\quad y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\, a_i(x)$

c_i تحدد من المعادلة الجبرية

$$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, c_j = c_i$$

وبما أن $f_i = 0$ نحصل على جملة معادلات جبرية متجانسة وبما أن λ ليست قيمة خاصة

فإن حلول هذه المعادلات $\quad c_i = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, n)$

$$y(x) = f(x)$$

ALSAMAH®

Scanned by CamScanner

ص 84 النواة المتناظرة ، $K(x,t) = K(t,x)$

بالاعتماد على النواة المتناظرة سنأخذ خاصيتين

الخاصية الأولى :

تكامل حاصل ضرب أي دالتين مميزتين مرافقتين لقيمتين مميزتين مختلفتين على المجال الأساسي $[a,b]$ يساوي الصفر علماً أن النواة $K(x,t)$ متناظرة

البرهان :

لتكن λ_1 , λ_2 قيمتين مميزتين مختلفتين ولتكن $g_1(x)$ و $g_2(x)$ الدالتين المميزتين المرافقتين لهما على الترتيب أي :

$$g_1(x) = \lambda_1 \int_a^b K(x,t)\, g_1(t)\, dt \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} g_1(x) = \int_a^b K(x,t)\, g_1(t)\, dt$$

$$g_2(x) = \lambda_2 \int_a^b K(x,t)\, g_2(t)\, dt \Rightarrow \frac{1}{\lambda_2} g_2(x) = \int_a^b K(x,t)\, g_2(t)\, dt$$

نضرب المعادلة الأولى (1) بـ $g_2(x)$ والمعادلة (2) بـ $g_1(x)$ ثم نكامل من $x=a$ إلى $x=b$

ونطرح بعد ذلك إحدى المعادلتين من الثانية :

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \int_a^b g_1(x)\, g_2(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_a^b K(x,t)\, g_1(t)\, dt\right] g_2(x)\, dx -$$

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(x,t)\, g_2(t)\, dt\right] g_1(x)\, dx$$

نغير ترتيب التكامل في التكامل الأول :

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \int_a^b g_1(x)\, g_2(x)\, dx =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(x,t)\, g_2(x)\, dx\right] g_1(t)\, dt -$$

$$- \int_a^b \left[\int_a^b K(x,t)\, g_2(t)\, dt\right] g_1(x)\, dx$$

نبدل في التكامل الثاني الأول x بـ t و t بـ x وبما أن النواة متناظرة $K(x,t) = K(t,x)$

بالتالي نحصل في الطرف الأيمن على حدين متساويين ومختلفين بالإشارة

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \int_a^b g_1(x)\, g_2(x)\, dx = 0$$

وبما أن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ فإن

$$\int_a^b g_1(x)\, g_2(x)\, dx$$

الخاصة الثانية : جميع القيم الخاصة حقيقية

البرهان : نفرض جدلاً أن λ_0 هي قيمة خاصة عقدية ذات جزء تخيلي غير معدوم وأن $g_0(x)$ التابع الخاص الموافق لها ، والذي لا يمكن له أن يكون معدوماً استناداً إلى التعريف إذاً :

وبالتالي $g_0(x) = \lambda_0 \int_a^b k(x,t)\, g_0(t)\, dt$ وإذا انتقلنا إلى الكميات المرافقة في هذه المعادلة التكاملية نحصل

$$\overline{g_0(x)} = \overline{\lambda_0} \int_a^b k(x,t)\, \overline{g_0(t)}\, dt$$

ومنه نجد أن $\overline{\lambda_0}$ هي قيمة خاصة وأن $\overline{g_0(x)}$ التابع الخاص لها

وبما أن λ_0 ليس حقيقياً فإن $\overline{\lambda_0} \neq \lambda_0$ وكذلك التابعين $\overline{g_0(x)}$ ، $g_0(x)$

إذاً يحققان الشرط (2) لأنهما يوافقان قيمتان خاصتان مختلفتان فنحصل :

$$\int_a^b |g_0(x)|^2\, dx = 0$$

حسب نظرية فإن $g_0(x) = 0$ وهذا ~~مخالف~~ غير ممكن لأن $g(x)$ تابع خاص

وبالتالي جميع القيم الخاصة حقيقية

ملاحظة ص 87

في حالة النواة $k(x,t)$ تناظر المعادلات الجبرية لمتحول المعادلة المتجانسة الموافقة للمعادلة المعطاة هي المعادلات الجبرية نفسها للمعادلة المتجانسة الموافقة للمعادلة المعطاة

والتوابع الخاصة الموافقة للقيم الخاصة للنواة $k(x,t)$ للمعادلة التكاملية المتجانسة هي نفس التوابع الخاصة لمتحول المعادلة المتجانسة أي :

$$g^{(1)}(x) = \varphi^{(1)}(x) \qquad g^{(2)}(x) = \varphi^{(2)}(x)$$

مثال ص 88 + 90 +